బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య సంబంధం?

AADE SATYYANARAYANA
Subject Expert

ముఖ్యమైన ప్రశ్నలు

1. ఒక అంకశ్రేఢిలో చివరి పదం 28, మొదటి 9 పదాల మొత్తం 144 అయితే, మొదటి పదం కనుగొనండి.

జ. ఇచ్చిన అంకశ్రేఢిలో చివరి పదం $l = 28$
మొదటి 9 పదాల మొత్తం
$S_9 = 144$,
మొదటి పదం a = ?
అంకశ్రేఢిలోమొదటి n పదాల మొత్తం $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$
$\Rightarrow 144 = \frac{9}{2}[a+28]$
$\Rightarrow a + 28 = 144 \quad \frac{2}{9} = 32$
$a + 28 = 32 \Rightarrow a = 4$
∴ అంక శ్రేఢిలో మొదటి పదం = 4

2. (7, –2) (3, k), (5, 1) సరేఖీయాలు అయితే, k విలువను కనుగొనండి.

జ. ఇచ్చిన మూడు బిందువులు L(7, –2), M(3, k), N(5, 1)లు సరేఖీయాలు కాబట్టి $\Delta LMN = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)| = 0$
$\Rightarrow \frac{1}{2}|7(k - 5) + 3[1-(-2)] + 5(-2-k)| = 0$
$\Rightarrow |7k - 35 + 9 - 10 - 5k| = 0$
$\Rightarrow |2k - 36| = 0$
$\Rightarrow 2k = 36$
$\Rightarrow k = 18$

3. (13, 14), (5, 8), (1, 5)లతో త్రిభుజం ఏర్పడుతుందా? లేదా? కారణాన్ని తెల్పండి?

జ. L(13, 14), M(5, 8), N(1, 5)లు త్రిభుజ శీర్షాలు అనుకుంటే,
L, M బిందువుల మధ్య దూరం
$\overline{LM} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$= \sqrt{(5-13)^2+(8-14)^2}$
$= \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ యూనిట్లు
అదే విధంగా $\overline{MN} = \sqrt{(1-5)^2+(5-8)^2}$
$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ యూనిట్లు
$\overline{LN} = \sqrt{(1-13)^2+(5-14)^2}$
$= \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$ యూనిట్లు
అంటే $\overline{LM} + \overline{MN} = \overline{LN}$
కానీ త్రిభుజంలోని మూడు భుజాల్లో, ఏవైనా రెండు భుజాల పొడవుల మొత్తం మూడో భుజం కంటే అధికంగా ఉండాలి. ఇది ఒక విరోధాభాసం. కాబట్టి ఇచ్చిన 3 శీర్షాలు త్రిభుజాన్ని ఏర్పర్చలేవు.

4. $P(m) = 4m^2 - 4m + 1$ అనే బీజీయ సమాసం శూన్యాలను కనుగొనండి. బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

జ. $p(m) = 4m^2 - 4m + 1$ ఒక వర్గ బహుపది అయితే,
a = 4, b = –4, c = 1
$4m^2 - 4m + 1 = 4m^2 - 2m - 2m + 1$
$= 2m\,[2m-1] - 1[2m-1]$
$= (2m-1)(2m-1)$
$= (2m-1)^2$
p(m) = 0 అనుకొంటే $4m^2 - 4m + 1 = 0$,
$\Rightarrow (2m-1)^2 = 0$
$\Rightarrow m = ½, ½$

అంటే p(m) బహుపది శూన్యాలు ½,½
శూన్యాల మొత్తం $\alpha + \beta = ½ + ½ = 1$
$\frac{-(x \text{ పదగుణకం})}{x^2\text{పదగుణకం}} = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{4} = 1$
$\therefore \alpha+\beta = \frac{-b}{a}$
శూన్యాల లబ్ధం = ½×½ = ¼
$\frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2\text{పదగుణకం}} = c/a = ¼$
$\therefore$ శూన్యాల లబ్ధం $= \frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2\text{పదగుణకం}}$
కాబట్టి సరిచూడడమైంది.

5. $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ రెండు శూన్యాలు √2, –√2 అయితే, మిగిలిన రెండు శూన్యాలను కనుగొనండి.

జ. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ అనుకొంటే.
–√2, √2 లు f(x) శూన్యాలు అయితే
$\Rightarrow (x+\sqrt{2}), (x-\sqrt{2})$లు వరుసగా f(x) కారణాంకాలు అవుతాయి,
వాటి లబ్ధం $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = x^2-2$ కూడా ఒక కారణాంకమే అవుతుంది.

$x^2-2)\ 2x^4-3x^3-3x^2+6x-2\ (2x^2-3x+1$
$2x^4 \quad -4x^2$
$- \quad +$
$-3x^3 + x^2 + 6x - 2$
$-3x^3 \quad +6x$
$+ \quad -$
$+x^2 - 2$
$+x^2 - 2$
$- \quad +$
0

అంటే $f(x) = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$,
$2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1$
$= 2x(x-1) - 1(x-1)$
$= (2x-1)(x-1)$
f(x) = 0 అనుకుంటే
$\Rightarrow (2x-1)(x-1) = 0$
$\Rightarrow 2x - 1 = 0$ or $x - 1 = 0$
$\Rightarrow x = ½$ or $x = 1$
కాబట్టి f(x) శూన్యాలు –√2, √2, ½, 1

6. (i) 429, 6385లను వాటి ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్యక్తం చేయండి.
(ii) ఆయా సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకాల సహాయంతో వాటి గ.సా.భా., క.సా.గు.లను కనుగొనండి.

జ.
i)
3|429
11|143
  13

5|6825
5|1365
13|273
3|21
  7

కాబట్టి ఇచ్చిన సంఖ్యలను ప్రధాన సంఖ్యల లబ్ధంగా కింది విధంగా రాయవచ్చు.
$429 = 3 \times 11 \times 13$, $6825 = 3 \times 5^2 \times 7 \times 13$
ii) 429, 6825 ల క.సా.గు.
= సంఖ్యల ఉమ్మడి ప్రధాన కారణాంకాల్లో ప్రతీదాని గరిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం
$= 3 \times 5^2 \times 7 \times 11 \times 13 = 75{,}075$
iii) 429, 6825ల గ.సా.భా.
= సంఖ్యల ఉమ్మడి ప్రధాన కారణాంకాల కనిష్ఠ ఘాతాల లబ్ధం = 3 × 13 = 39

7. 10, 7, 4, ….(–101) అనే అంకశ్రేఢిలో చివరి నుంచి 24వ పదాన్ని కనుగొనండి.

జ. ఇచ్చిన అంక శ్రేఢిలో మొదటి పదం a = 10,
పదాంతరం d = 7 –10 = –3,
చివరి పదం l = –101.
అంకశ్రేఢిలో 24వ పదం (చివరి నుంచి)
కనుగొనడానికి, మొదట దానిలో మొత్తం పదాల సంఖ్య తెలియాలి.
అంకశ్రేఢిలో సాధారణ పదం $t_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow -101 = 10 + (n-1)(-3)$
$\Rightarrow (n-1)(-3)$
$= -101 - 10 = -111$
$(n-1) = \frac{-111}{-3} = 37$
$\Rightarrow n = 37 + 1 = 38$
అంకశ్రేఢిలో మొత్తం పదాలు = 38, శ్రేఢిలో చివరి నుంచి 24వ పదం మొదటి నుంచి 15వ పదం అవుతుంది.
[Note: శ్రేఢిలో మొత్తం పదాలు n, ఒక పదం స్థానం మొదటి నుంచి m, చివరి నుంచి n అయితే (m + n)–1 = శ్రేఢిలోని మొత్తం పదాలు]
∴ శ్రేఢిలో 15వ పదం
$t_{15} = a + (n-1)d$
$= 10 + (15-1)(-3)$
$= 10 + 14(-3)$
$= 10 - 42$
$= -32$
∴ అంకశ్రేఢిలోని 24వ పదం (చివరి నుంచి) –32 అవుతుంది.

8. 10, 243ల మధ్య ఉన్న 6 యొక్క గుణిజాల సంఖ్యను కనుగొనండి.

జ. 10, 243ల మధ్య ఉన్న మొదటి, చివరి 6 యొక్క గుణిజాలు a, l అనుకుంటే

6) 10 (1
   –6
    4

6)243(40
  –24
    3
   –0
    3

∴ మొదటి పదం a = 10 + (6–4) = 12
చివరి పదం l = 243 – 3 = 240
కాబట్టి 10 నుంచి 243ల మధ్య ఉన్న 6 యొక్క గుణిజాల శ్రేఢి 12, 18, 24…. 240 అవుతుంది.
ఇది ఒక గుణశ్రేఢి. దీనిలో మొత్తం పదాల సంఖ్య m అనుకుంటే,
$t_m = a + (m-1)d$
$\Rightarrow 240 = 12 + (m-1)(6)$
$\Rightarrow (m-1)6 = 240 - 12 = 228$
$m - 1 = \frac{228}{6} = 38$
m = 38 + 1 = 39
అంటే 10, 245ల మధ్య 6 యొక్క గుణిజాల సంఖ్య 39.

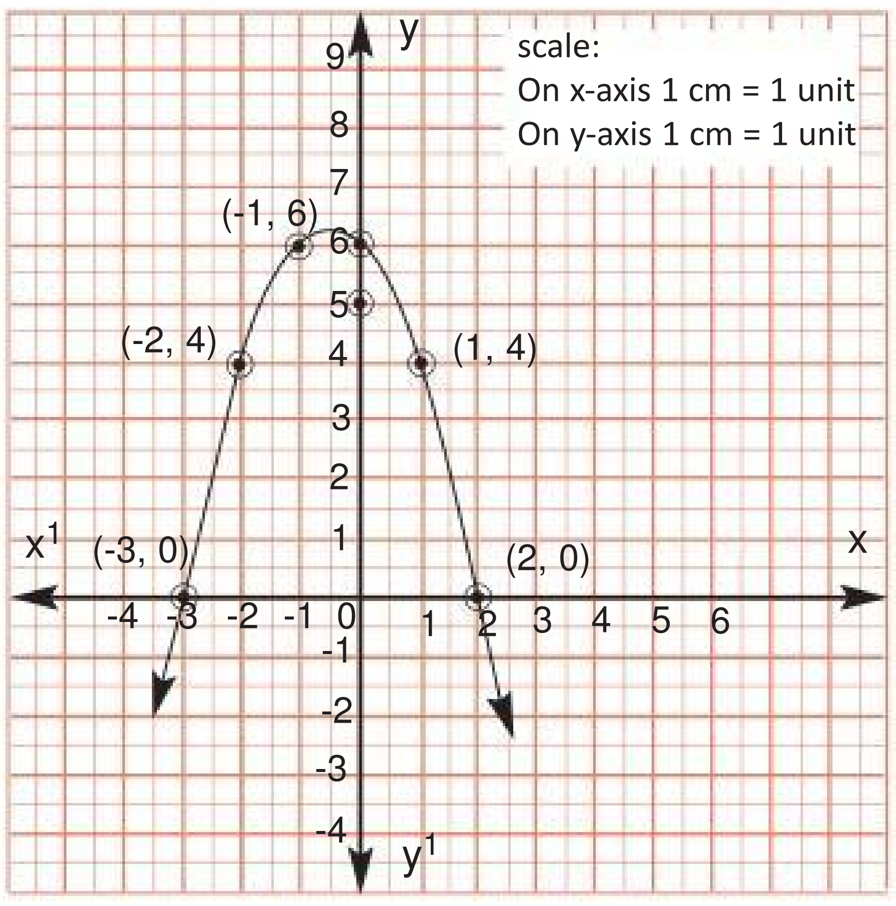
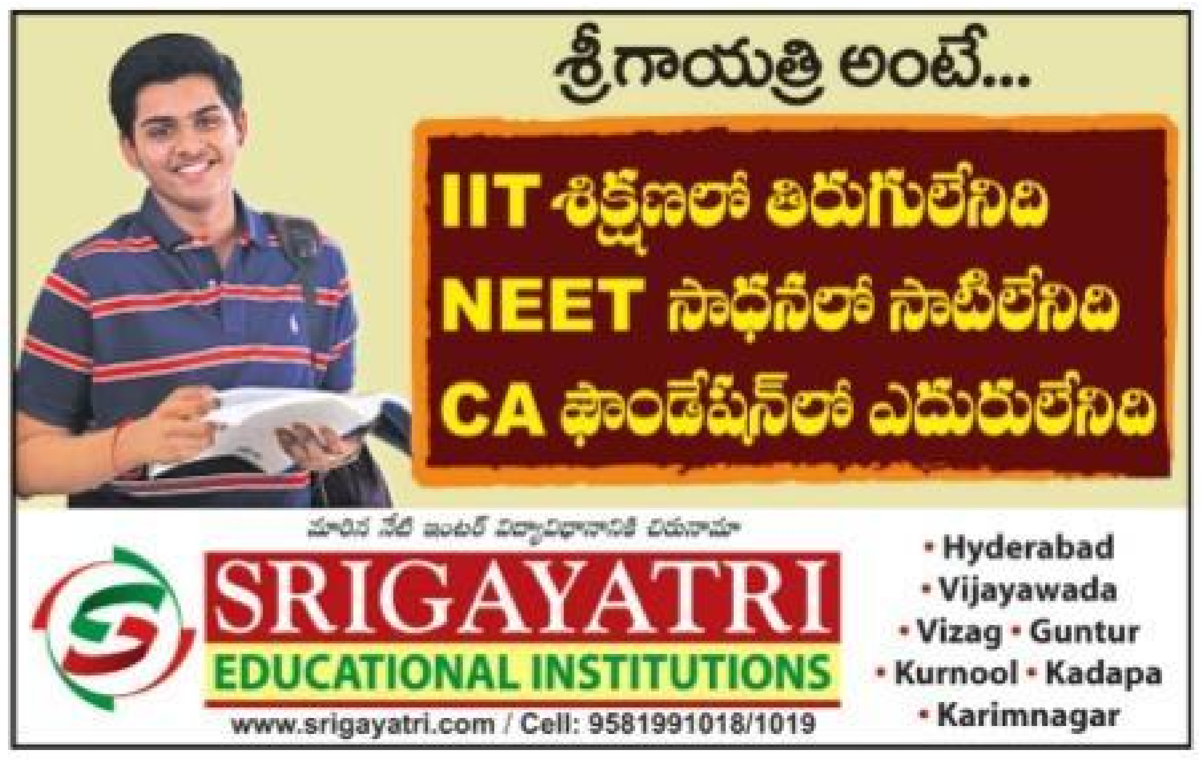
9. ఇద్దరు స్నేహితుల వయస్సుల మొత్తం 24 ఏళ్లు. 4 ఏళ్ల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం 48 ఏళ్లు. ఇది సాధ్యమే అయితే, వారి ప్రస్తుత వయస్సులు గణించండి.

జ. ఇద్దరు మిత్రుల ప్రస్తుత వయస్సులు m, n అనుకుంటే,
m + n = 24
n = 24 – m
నాలుగు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సులు (m – 4), (n – 4)
లేదా (m–4), (20 – m)
అవుతాయి.
అప్పుడు 4 సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల లబ్ధం
(m – 4) (20–m) = 48
$\Rightarrow 20m - m^2 - 80 + 4m = 48$
$\Rightarrow -m^2 + 24m - 128 = 0$
లేదా
$m^2 - 24m + 128 = 0$
ఇది mలో ఒక వర్గ బహుపది దీనిలో
a = 1, b = –24, c = 128
$b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(1)(128)$
$= 576 - 512 = 64 > 0$
కావున వర్గబహుపది వాస్తవ మూలాలను కలిగి ఉంటుంది. కాబట్టి ఇచ్చిన దత్తాంశం వాస్తవ పరిమితులను కలిగి ఉంది,
వర్గమూలాలు
$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$\frac{-(-24)+\sqrt{64}}{2(1)},$
$\frac{-(-24)-\sqrt{64}}{2}$
$= \frac{24+8}{2}, \frac{24-8}{2}$
= 16, 8
కాబట్టి ఆ ఇద్దరు మిత్రుల ప్రస్తుత వయస్సులు 16, 8.

10. $y = -x^2 - x + 6$ వక్రాన్ని గీయండి, గ్రాఫ్ సాయంతో వాటి శూన్యాలను గణించండి.

జ. ఇచ్చిన సమీకరణం $y = -x^2 - x + 6$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9
$-x$	3	2	1	0	–1	–2	–3
+6	6	6	6	6	6	6	6
$y=-x^2-x+6$	0	4	6	6	4	0	6
(x, y)	(-3, 0)	(-2, 6)	(-1, 6)	(0, 6)	(1, 4)	(2, 0)	(3, 6)



గ్రాఫ్ ఆధారంగా గమనించిన విషయం ఏమిటంటే $y = -x^2-x+6$ వక్రం x-అక్షాన్ని –3, 2ల వద్ద ఖండిస్తోంది. కాబట్టి దాని మూలాలు –3, 2 అవుతాయి.