మౌలికాంశాలపై పట్టుతో మెరుగైన ప్రిపరేషన్

M.N. Rao
Senior faculty, Sri Chaitanya Educational institutions

ఇంటర్ విద్యార్థులు మొదటి సంవత్సరం నుంచే దీర్ఘకాలిక ప్రణాళికతో ప్రిపేరవ్వాలి. ముఖ్యంగా వివిధ ప్రవేశ పరీక్షల దృష్ట్యా ఎంపీసీ విద్యార్థులు మరింత జాగ్రత్తగా చదవాలి. ఇంటర్‌లో సాధ్యమైనంత ఎక్కువ మార్కులు సాధించడానికి కృషి చేస్తూనే.. ఎంసెట్ తదితర ఎంట్రన్స్ టెస్టులకు సంబంధించిన అంశాలపై దృష్టి సారించాలి.

మార్కులు, వెయిటేజీ ప్రకారం చూస్తే.. ఇంటర్ ఎంపీసీ విభాగంలోని మూడు సబ్జెక్టుల్లో గణితం అతి ముఖ్యమైంది. మ్యాథ్స్ 1ఎ, 1బి కలిపి ఇంటర్ మొదటి సంవత్సరంలో గణితం సబ్జెక్టుకు 150 (75+75) మార్కులు ఉంటాయి. అదేవిధంగా ఎంసెట్‌లో మొత్తం 160 మార్కులకుగాను 80 మార్కుల ప్రశ్నలు గణితం నుంచే వస్తాయి.

గణితంలో ముందుగా మౌలికాంశాలపై పట్టు సాధించాలి. ప్రధాన సూత్రాలన్నింటినీ నోట్సు రూపంలో రాసుకొని పునశ్చరణ చేయడం ద్వారా గుర్తుంచుకోవాలి. తద్వారా గరిష్ట మార్కులు సాధించవచ్చు.

విద్యార్థులు ఇప్పటి నుంచే ప్రణాళికాబద్ధంగా పరీక్షలకు సన్నద్ధమవాలి. పబ్లిక్ పరీక్షల కోణంలో అతి ముఖ్యమైన అధ్యాయాలను, కాన్సెప్ట్‌లను గుర్తించి వాటికి అధిక ప్రాధాన్యం ఇచ్చి చదవాలి. ప్రధాన కాన్సెప్ట్‌ను చదువుతున్నప్పుడే దానికి సంబంధించి తరగతి గది నోట్స్, స్టడీ మెటీరియల్‌ను క్షుణ్ణంగా అధ్యయనం చేయాలి. ఆ తర్వాత ఆబ్జెక్టివ్ ప్రశ్నలు, వాటి అనువర్తనాలపై దృష్టి సారించాలి. పరీక్షల్లో చేసే లోపాలను సరిదిద్దుకుంటూ పాఠ్యాంశాలపై పూర్తి పట్టు సాధించాలి. విద్యార్థుల సౌకర్యార్థం ముఖ్యమైన అధ్యాయాలు, వాటిలోని ప్రశ్నలు - సమాధానాలను సవివరంగా అందిస్తున్నాం...

MATHEMATICAL INDUCTION

1. From this chapter one Long Answer Question (LAQ - 7 marks) will appear in final inter exam.
2. In this chapter three methods are there i.e. Divisibility, Summation of series & Inequality.
3. Out of three methods divisibility & summation of series are important.
4. In EAMCET one question will occur from this chapter.
5. For JEE-Adv & JEE-Main mathematical induction interrelated to binomial theorem are important.
6. Principle of finite Mathematical Induction:
   Let S(n) be a statement for each $n \in N$
   If
   i) S(1) is true
   ii) S(k) is true $\Rightarrow$ S(k + 1) is true, then S(n) is true for all $n \in N$.
   This is fundamental principle of mathematical induction.
7. **Useful formulae:**
   » $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
   » $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   » $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Long Answer Questions
(7 Marks)

Using mathematical induction, prove the following $\forall\ n \in N$

1. Prove that $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ is divisible by 17.

Sol. Let S(n) be the statement that $3.5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ is divisible by 17

For n = 1, $3.5^{2(1)+1} + 2^{3(1)+1}$

$= 3.5^3 + 2^4 = 375 + 16 = 391$

$= 17 \times 23$ is divisible by 17.

$\therefore$ S(1) is true.

Assume that S(k) is true

$3.5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 17m$ where $m \in N$

$\Rightarrow 3.5^{2k+1} = 17m - 2^{3k+1}$

We show that S(k + 1) is true

$\Rightarrow 3.5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1}$

$= 3.5^{2k+1}.5^2 + 2^{3k+1}.2^3$

$= (17m - 2^{3k+1})\,25 + 2^{3k+1}.8$

$= 17m.25 - 2^{3k+1}.25 + 2^{3k+1}.8$

$= 17m.25 - 17.2^{3k+1}$

$= 17(25m - 2^{3k+1})$ is divisible by 17

$\therefore$ S(k + 1) is true.

$\therefore$ By principle of Mathematical Induction S(n) is true for all $n \in N$

2. Prove that 2.3 + 3.4 + 4.5 + ... upto n terms $= \frac{n(n^2+6n+11)}{3}$

Sol: Let S(n) be the statement that 2.3+3.4+4.5+....+(n+1)(n+2) $= \frac{n(n^2+6n+11)}{3}$

For n = 1,

LHS = 2.3 = 6

$\text{RHS} = \frac{1(1^2+6(1)+11)}{3} = \frac{18}{3} = 6$

LHS = RHS

$\therefore$ S(n) is true for n = 1

Assume that S(n) is true for n = k

2.3+3.4+4.5+.....+ (k+1) (k+2) $= \frac{k(k^2+6k+11)}{3}$

We show that S(n) is true for n = k + 1

Adding (k + 2)(k + 3) on both sides

2.3 + 3.4 + 4.5 + ... + (k + 1) (k + 2) + (k + 2) (k + 3)

$= \frac{k(k^2+6k+11)}{3} + (k+2)(k+3)$

$= \frac{k(k^2+6k+11)+3(k+2)(k+3)}{3}$

$= \frac{k^3+6k^2+11k+3k^2+15k+18}{3}$

$= \frac{k^3+9k^2+26k+18}{3}$

$= \frac{k^3+9k^2+26k+18}{3}$

$= \frac{k^3+8k^2+k^2+18k+8k+18}{3}$

$= \frac{(k+1)\left((k+1)^2+6(k+1)+11\right)}{3}$

Thus S(k) is true

$\therefore$ S(k + 1) is true

By principle of Mathematical Induction S(n) is true $\forall\ n \in N$

3. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

Sol: Let S(n) be the statement that $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

For n = 1, $\text{LHS} = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{3}$

$\text{RHS} = \frac{1}{2(1)+1} = \frac{1}{3}$

LHS = RHS

$\therefore$ S(n) is true for n = 1

Assume S(n) is true for n = k

$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$

We show that S(n) is true for n = k + 1

Adding $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ on both sides

$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k}{(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$

Thus S(k) is true, S(k + 1) is true

By principle of Mathematical Induction S(n) is true $\forall\ n \in N$.

Previous Questions

LAQ - 7 Marks

1. Using mathematical induction prove that:

$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

for all $n \in N$

(AP IPE - March, 2018)

2. Using mathematical induction prove that

1.2.3+2.3.4+3.4.5+ .... n Terms $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

(TS IPE - March, 2017)

3. Using mathematical induction prove that:

$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}\ldots$ upto n Terms $= \frac{n}{3n+1}$ **(AP IPE - March, 2017)**

JUNIOR INTER MATHEMATICS - IA

Student has to answer.. 10 Very Short Answer Questions, 5 Out of 7 Short Answer Questions and 5 out of 7 Long Answer Questions

MATHEMATICS - IA (Max. Marks 75)

Chapter	*LAQ {7 Marks}*	*SAQ {4 Marks}*	*VSAQ {2 Marks}*	*Total*
Functions	1	—	2	11
Mathematical Induction	1	—	—	7
Properties of Triangle	1	1	—	11
Vector Addition	—	1	2	8
Vector Product	1	1	1	13
Trigonometry upto Transformations	1	1	2	15
Matrices & Determinants	2	1	2	22
Trigonometric Equations	—	1	—	4
Inverse Trigonometry	—	1	—	4
Hyperbolic Functions	—	—	1	2

EAMCET Previous Questions

1. For any integer $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = ?$

1) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 2) $\frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

3) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 4) $\frac{n(n-1)(2n+8)}{6}$

Hint: $\Sigma\, k(k+2) = 1.3+2.4+3.5 \ldots$ verify n=2: 1.3+2.4= 11

Put in option (2): $\frac{2.3.(11)}{6} = 11$

2. The remainder when $7^n - 6n - 50$ $(n \in N)$ is divided by 36, is:

1) 22 2) 23
3) 1 4) 21

Hint: $n = 1 \Rightarrow$ remainder = 23

3. If $t_n = \frac{1}{4}$ (n+2) (n+3) for n = 1, 2, 3... then

$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_3}+\ldots\ldots+\frac{1}{t_{2005}} =$

1) $\frac{4004}{3005}$ 2) $\frac{3005}{4004}$

3) $\frac{8020}{6024}$ 4) None

Hint: $\frac{1}{t_n} = \frac{4}{(n+2)(n+3)}$

$= \frac{4}{n+2} - \frac{4}{n+3}$

Now $\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{4}\right)+\left(\frac{4}{4}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{6}\right)+\ldots$

$+\left(\frac{4}{2007}-\frac{4}{2008}\right)$

$= \frac{4}{3} - \frac{4}{2008} = \frac{8020}{6024}$

4. $S_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$ then

$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \ldots + S_n^2 =$

1) $\frac{n}{24}(2n^2+9n+13)$

2) $\frac{1}{24}(2n^2+9n+13)$

3) $\frac{n^2}{24}(2n^2+9n+13)$

4) $\frac{n}{24}(2n^2-9n+13)$

Hint: Put n = 2 and verify the options.

$S_1^2 + S_2^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$

5. $4^3+5^3+6^3+ \ldots +10^3 =$

1) 1905 2) 2358
3) 2447 4) 2989

Hint: $\sum_{n=1}^{10} n^3 - \sum_{r=1}^{3} r^3$