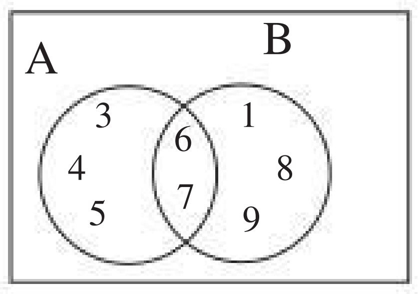
బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య ఉన్న సంబంధం?

యార్లగడ్డ వనరాజు
సబ్జెక్టు నిపుణులు

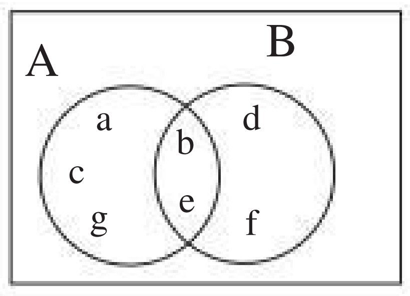
ముఖ్యమైన ప్రశ్నలు

1. ఇచ్చిన వెన్ చిత్రం నుంచి n(A), n(B), n(A∪B), n(A∩B)లను కనుగొని, వాటి మధ్య సంబంధాన్ని తెలపండి.



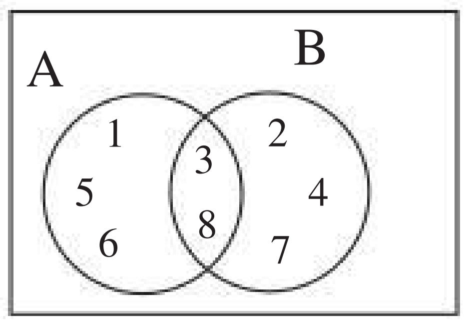
జ: ఇచ్చిన వెన్ చిత్రం నుంచి
A = {3, 4, 5, 6, 7}, n(A) = 5 ... (1)
B = {1, 6, 7, 8, 9}, n(B) = 5 ... (2)
A∪B = {1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
n(A∪B) = 8 .... (3)
A∩B = {6, 7}, n(A∩B) = 2 ... (4)
సమీకరణాలు (1), (2), (3), (4)ల నుంచి n(A∪B) = n(A) + n(B) – n(A∩B) అని గ్రహించవచ్చు.
లేదా n(A∪B) + n(A∩B) = n(A) + n(B)

2. వెన్‌చిత్రం నుంచి A–B, B–A, A∩Bలను కనుగొని, ఇవి పరస్పరం వియుక్త సమితులు అని చూపండి.



జ: ఇచ్చిన వెన్ చిత్రం నుంచి
A–B = {a, c, g} ..... (1)
B–A = {d, f} ..... (2)
A∩B = {b, e} ..... (3)
సమీకరణాలు (1), (2), (3)లను పరిశీలిస్తే.. A–B, B–A మరియు A∩B సమితులలో ఉమ్మడి మూలకాలు లేవని గమనించవచ్చు. కాబట్టి ఇవి పరస్పరం వియుక్త సమితులు.

3. కింద ఇచ్చిన వెన్ చిత్రం నుంచి (A–B) ∪ (B–A), (A∪B) – (A∩B) లను కనుగొనండి. ఇవి రెండూ సమానమా? కాదా? మీ సమాధానాన్ని సమర్థించండి.



జ: ఇచ్చిన వెన్ చిత్రం నుంచి
A – B = {1, 5, 6}, B – A = {2, 4, 7} (A–B) ∪ (B–A)
= {1, 5, 6} ∪ {2, 4, 7}
= {1, 2, 4, 5, 6, 7} ..... (1)
వెన్ చిత్రం నుంచి A∪B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
A∩B = {3, 8}
(A∪B) – (A∩B) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} – {3, 8}
= { 1, 2, 4, 5, 6, 7 } ..... (2)
సమీకరణాలు (1), (2)ల నుంచి
(A–B) ∪ (B–A) = (A∪B) – (A∩B)

4. A = {x : x ఒక సహజ సంఖ్య}
B = {x : x ఒక బేసి సహజ సంఖ్య}
C = {x : x ఒక సరి సహజ సంఖ్య}
D = {x : x ఒక ప్రధాన సంఖ్య}
అయితే కిందివాటిని కనుగొనండి.
A∩B, A∩C, A∩D, B∩C, B∩D, C∩D.

జ: A = {x : x ఒక సహజ సంఖ్య}
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}
B = {x : x ఒక బేసి సహజ సంఖ్య}
= {1, 3, 5, 7, 9, ...}
C = {x : x ఒక సరి సహజ సంఖ్య}
= {2, 4, 6, 8, 10, ...}
D = {x : x ఒక ప్రధాన సంఖ్య}
= {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...} A ∩ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...} ∩ {1, 3, 5, 7, 9, ...}
= {1, 3, 5, 7, ...} = B
A ∩ C = {1, 2, 3, 4, 5, ... } ∩ {2, 4, 6, 8, 10, ..}
= {2, 4, 6, ...} = C
A ∩ D = {1, 2, 3, 4, 5, ...} ∩ {2, 3, 5, 7, 11,13, ...}
= {2, 3, 5, 7, ...} = D
B ∩ C = {1, 3, 5, 7, ...} ∩ {2, 4, 6, 8, ...} = { }= ϕ
B ∩ D = {1, 3, 5, 7, 9, ...} ∩ {2, 3, 5, 7, 11, ...}
= {3, 5, 7, 11, ... }
C ∩ D = {2, 4, 6, 10, ...} ∩ {2, 3, 5, 7, ...} = {2}

5. A = {2x | x ∈ N, x ≤ 5}
B = {x^2 | x ∈ N, x ≤ 5}అయితే A∩B, B∩Aలను కనుగొనండి. దీని ద్వారా మీరు ఏం గమనించారో తెలపండి.

జ: A = {2x | x ∈ N, x ≤ 5}
= {2, 4, 6, 8, 10}
B = {x^2 | x ∈ N, x ≤ 5}
= {1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2}
= {1, 4, 9, 16, 25}
A∩B = {2, 4, 6, 8, 10} ∩ {1, 4, 9, 16, 25} = {4} ..... (1)
B∩A = {1, 4, 9, 16, 25} ∩ {2, 4, 6, 8, 10} = {4} .... (2)
సమీకరణాలు (1), (2)ల నుంచి
A∩B = B∩A అని గమనించాను.

6. A అనేది 3 గుణిజాల సమితిని, B అనేది 4 గుణిజాల సమితిని సూచిస్తే A∩B దేని గుణిజాల సమితిని సూచిస్తుంది?

జ: A అనేది 3 గుణిజాల సమితి
= {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...}
B అనేది 4 గుణిజాల సమితి
{4, 8, 12, 16, 20, 24, ...}
A∩B = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ..} ∩ {4, 8, 12, 16, 20, 24, ...} = {12, 24, ...}
∴ A ∩ B అనేది 12 గుణిజాల సమితిని సూచిస్తుంది.

7. A = {x : x అనేది 12 కారణాంకం} B = {x : x ప్రధాన సంఖ్య మరియు 1 < x < 16} అయితే A∪B, B∪Aలను కనుగొనండి. మీరు ఏం గమనించారో తెలపండి.

జ: A = {x : x అనేది 12 కారణాంకం}
= {1, 2, 3, 4, 6, 12}
B = {x : x ప్రధాన సంఖ్య మరియు 1 < x < 16}
= {2, 3, 5, 7, 11, 13}
A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 6, 12} ∪ {2, 3, 5, 7, 11, 13}
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13} .... (1)
B∪A = {2, 3, 5, 7, 11, 13} ∪ {1, 2, 3, 4, 6, 12}
= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13} .... (2)
సమీకరణాలు (1), (2)ల నుంచి A∪B

= B∪A అని గ్రహించాను.

8. వియుక్త సమితులకు ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

జ: A∩B = ϕ అయితే A, B సమితులను వియుక్త సమితులు అంటారు.
ఉదా (1): A = {2, 5, 8, 9}
B = {3, 4, 6, 7}
ఉదా (2): సరిసంఖ్యల సమితి, బేసి సంఖ్యల సమితి.
ఉదా (3): ప్రధాన సంఖ్యల సమితి, సంయుక్త సంఖ్యల సమితి.

9. A = {2, 3, 5} అయితే A∪ϕ, ϕ ∪A లను కనుగొనండి. వాటిని పోల్చండి.

జ: ϕ అనేది శూన్య సమితి
A = {2, 3, 5}
A∪ϕ = {2, 3, 5} ∪ { }
= {2, 3, 5} = A
ϕ ∪A = { } ∪ {2, 3, 5}
= {2, 3, 5} = A
∴ A∪ϕ = ϕ∪A =A

10. A = {0, 2, 4} అయితే A∩ ϕ, A∩A లను కనుగొని, వ్యాఖ్యానించండి.

జ: A = {0, 2, 4}, ϕ అనేది శూన్యసమితి
A∩ϕ = {0, 2, 4} ∩ { } = { } = ϕ
∴ A∩ϕ = ϕ అవుతుంది.
A∩A = {0, 2, 4} ∩ {0, 2, 4}
= {0, 2, 4} = A
∴ A ∩A = A అవుతుంది.

11. A = {2, 4, 6, 8, 10},
B = {3, 6, 9, 12, 15} అయితే A–B, B–A లను కనుగొనండి.

జ: A = {2, 4, 6, 8, 10}
B = {3, 6, 9, 12, 15}
A–B = {2, 4, 6, 8, 10} – {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 4, 8, 10}
B–A = {3, 6, 9, 12, 15} – {2, 4, 6, 8, 10} = {3, 9, 12, 15}
∴ A–B ≠ B–A.

12. సమితులు A–B, B–A, A∩B పరస్పరం వియుక్త సమితులు అవుతాయని కొన్ని ఉదాహరణల సహాయంతో పరిశీలించండి.

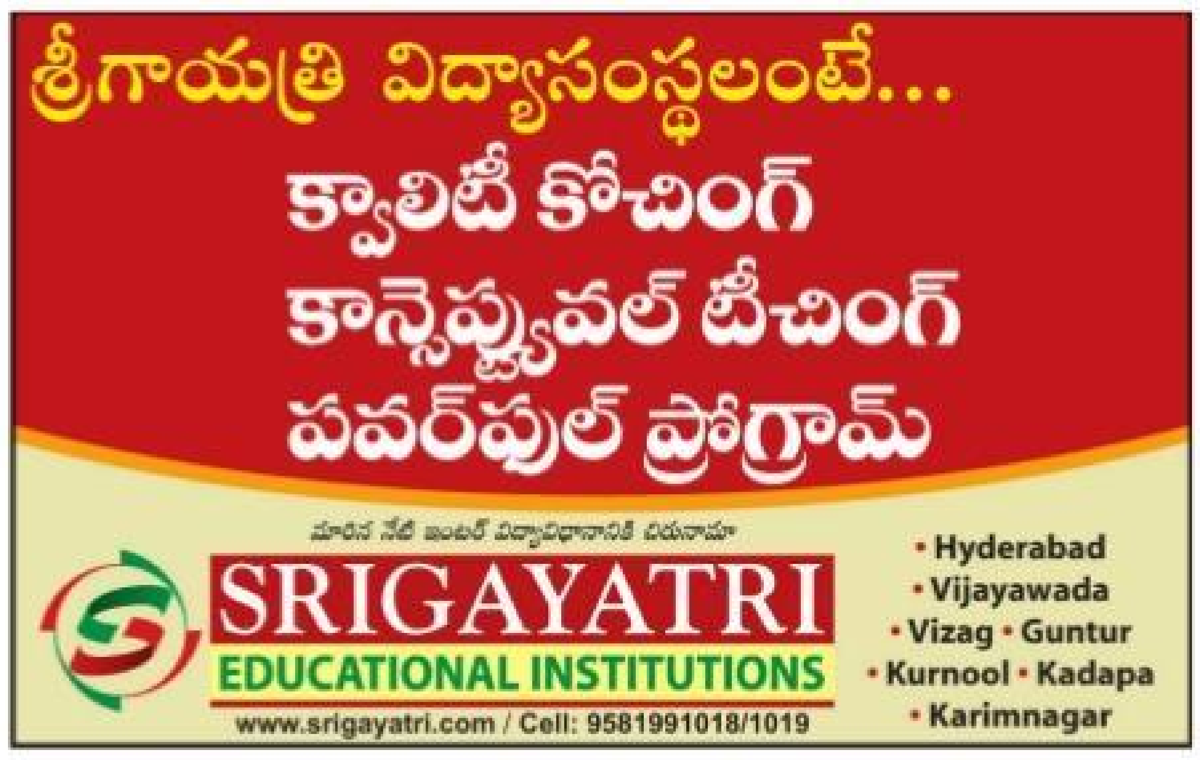
జ: A = {1, 2, 3, 4, 5},
B = {2, 4, 6, 8, 10} అనుకుంటే..
A – B = {1, 2, 3, 4, 5} – {2, 4, 6, 8, 10} = {1, 3, 5} .... (1)
B –A = {2, 4, 6, 8, 10} – {1, 2, 3, 4, 5} = {6, 8, 10} .... (2)
A∩B = {1, 2, 3, 4, 5} ∩ {2, 4, 6, 8, 10} = {2, 4} .... (3)
సమీకరణాలు (1), (2), (3)లను పరిశీలిస్తే.. మూడు సమితులలో ఉమ్మడి మూలకాలు లేవని గమనించవచ్చు. కాబట్టి A–B, B–A, A∩Bలు పరస్పరం వియుక్త సమితులు.

13. $3x^2 - x - 4$ అనే వర్గ బహుపది శూన్యాలను కనుగొని, శూన్యాలకు, బహుపది గుణకాలకు సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

$3x^2 - x - 4$
$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 3x - 4$
$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$
$= (3x-4)(x+1)$
$3x^2 - x - 4$ వర్గ బహుపది శూన్యాలు కనుగొనాలంటే $3x^2-x-4 = 0$ కావాలి.
$3x^2-x-4 = (3x - 4)(x+1) = 0$
$3x - 4 = 0$ లేదా $x + 1 = 0$
$x = \frac{4}{3}$ లేదా $x = -1$ $\therefore 3x^2-x-4$ శూన్యాలు $-1, \frac{4}{3}$
శూన్యాల మొత్తం
$= -1 + \frac{4}{3} = \frac{-3+4}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{-x \text{ గుణకం}}{x^2 \text{ గుణకం}}$
శూన్యాల లబ్ధం $= (-1)\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-4}{3} = \frac{\text{స్థిరపదం}}{x^2 \text{ గుణకం}}$

14. ఒక వర్గ బహుపది శూన్యాల మొత్తం, లబ్ధం వరుసగా $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ అయితే ఆ వర్గ బహుపదిని కనుగొనండి.

జ. వర్గ బహుపది శూన్యాలు వరుసగా α, β అనుకుంటే
α = –¼, β = ¼
α + β = – ¼ + ¼ = 0
$\alpha\beta = (-\frac{1}{4})(\frac{1}{4}) = \frac{-1}{16}$
α, βలు శూన్యాలుగా ఉన్న వర్గ బహుపది
$k\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}$
$\Rightarrow \left\{x^2 - 0x - \frac{1}{16}\right\} = k\left\{x^2 - \frac{1}{16}\right\}$
$= k\left\{\frac{16x^2 - 1}{16}\right\} = \frac{k}{16}\{16x^2 - 1\}$
$= k_1\{16x^2 - 1\}$; k_1 వాస్తవ సంఖ్య

15. ఘన బహుపది $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$ శూన్యాలు $-\frac{1}{2}, 1, 2$ అవుతాయని చూపండి. బహుపది గుణకాలకు, శూన్యాలకు మధ్య ఉన్న సంబంధాన్ని సరిచూడండి.

జ. ఇచ్చిన ఘన బహుపది
$p(x) = 2x^3-5x^2+x+2$ను ax^3+bx^2+cx+dతో పోలిస్తే
a = 2, b= –5, c=1, d=2 అవుతాయి.
$p(x) = 2x^3-5x^2+x+2$
$p\left(\frac{-1}{2}\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) + 2$
$= \frac{-1}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{-1-5-2+8}{4} = 0$
$p(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 + 1 + 2 = 0$
$p(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 2 + 2 = 0$
$p\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$, p(1) =0, p(2)=0
కాబట్టి p(x) కు $\frac{-1}{2}$, 1, 2 లు శూన్యాలు.
$\alpha = \frac{-1}{2}$, β=1, γ=2 అనుకొంటే
$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-1}{2} + 1 + 2 = \frac{5}{2} = \frac{-b}{a}$
αβ+βγ+γα=
$= \left(\frac{-1}{2}\right)(1) + (1)(2) + (2)\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$
$\alpha\beta\gamma = \left(\frac{-1}{2}\right)(1)(2) = -1 = \frac{-2}{2} = \frac{-d}{a}$